

# Métodos Matemáticos em Biologia

## Lista 2: Cálculo Diferencial

Prof. Bruno Ramos Lima Netto

Entrega: 17 de Maio de 2024

### Exercícios de Limites

**Exercício 1.** *Seja  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  uma sequência com  $a_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

1. *Qual o significado de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow L$  ? Dê um exemplo de alguma sequência que satisfaça esse limite.*
2. *Qual o significado de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow \infty$  ? Dê um exemplo de alguma sequência que satisfaça esse limite.*

**Exercício 2.** *Determine os seguintes limites:*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-2}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-1000}{5n^3+20n^2}$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10+n}{2+n^2}$ .

**Exercício 3.** *Determine se as sequências abaixo são convergentes ou divergentes. Caso sejam convergentes, determine seus limites.*

1.  $a_n = n$
2.  $a_n = \frac{1}{n}$
3.  $a_n = \frac{1}{n^p}$ , com  $p > 1$
4.  $a_n = \frac{1}{n^p}$ , com  $p < 1$
5.  $a_n = \log(n)$
6.  $a_n = \sin(n)$
7.  $a_n = \sin(\pi n)$
8.  $a_n = e^n$
9.  $a_n = (-2)^n$
10.  $a_n = n^n$

**Exercício 4.** *O que é uma assíntota? Dê exemplo de uma função que:*

1. *possua uma assíntota vertical.*
2. *possua uma assíntota horizontal*
3. *possua infinitas assíntotas verticais.*
4. *possua uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.*

**Exercício 5.** *Determine as assíntotas da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{2x^2+1}{2x^2-3x}$ . Esboce seu gráfico.*

**Exercício 6.** *Determine o valor de*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2-1}}{3n}$ .
2.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$ .
3.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ .

**Exercício 7.** *Determine o valor de :*

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{a^2x}$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$ .

**Exercício 8.** *Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x-5}{|x+2|}, & \text{se } x \neq -2 \\ 0, & \text{se } x = -2. \end{cases}$$

*Determine:*

1.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ .

**Exercício 9.** *Considere a função definida por  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$ . Determine  $f'(1)$ .*

**Exercício 10.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^x$  e Seja  $g(x) = x^{x^{x+1}} - f(f(x))$ . Determine  $f'(x)$  e  $g'(x)$ .*

## Exercícios de Derivadas

**Exercício 11.** Responda as questões abaixo:

- Quando que uma função  $f$  é derivável em um ponto  $x \in \mathbb{R}$ ?
- Explique, detalhadamente, o que você entende por derivada, tanto por seu significado físico quanto geométrico.

**Exercício 12.** Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:

1.  $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
2.  $f(x) = \tan(\log(22))$
3.  $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$
4.  $f(x) = 3x + \log(x)$

**Exercício 13.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ .

1. Calcule  $f'(0)$ .
2. Calcule  $f''(0)$ .
3. Calcule  $f^{(n)}(0)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 14.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1. Calcule  $f'(0)$ .
2. Calcule, se existir,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ .
3. Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \frac{x}{2} + f(x)$ . Mostre que  $g'(0) > 0$  mas que  $g$  não é crescente em um intervalo contendo 0. Veja o gráfico utilizando algum software de sua preferência. (wolframalpha.com é uma boa opção) e reproduza no papel o que você encontrou.

**Exercício 15.** Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:

1.  $f(x) = \text{sen}(x) \log(x)$
2.  $f(x) = x^2 \cos(x)$
3.  $f(x) = 2\text{sen}(x) \cos(x)$
4.  $f(x) = x^e e^x$
5.  $f(x) = e^{-x} x^{-e}$

**Exercício 16.** Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:

1.  $f(x) = \text{sen}(\log(x))$
2.  $f(x) = \cos(x^2)$
3.  $f(x) = \text{sen}(2\cos(x))$
4.  $f(x) = e^{e^{-x}}$
5.  $f(x) = x^{x^x}$

**Exercício 17.** *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1.  $f(x) = \tan(x)$
2.  $f(x) = \tan(x^2)$
3.  $f(x) = \text{sen}(2\tan(x))$
4.  $f(x) = \log\left(\frac{1}{\text{sen}(x)}\right)$

**Exercício 18.** *Seja  $f(x) = \log_{10}(x)$  e  $g(x) = f^{-1}(x)$ . Determine  $f'(x)$  e  $g'(x)$ .*

## Exercícios de Aplicações de Derivadas

**Exercício 19.** *Considere uma placa de metal cujo volume muda de acordo com a temperatura. Considere que para temperaturas  $t > 0$  (em Celsius), seu volume  $V$  (em metros cúbicos) é dado pela função:*

$$V(t) = 3 + \log(2t + 1).$$

1. *Qual o valor do volume da placa quando a temperatura é de  $0^\circ\text{C}$ ?*
2. *Imagine que seja indesejável que o volume do objeto ultrapasse  $7\text{m}^3$ . Qual a temperatura máxima que a placa pode atingir?*
3. *Qual a taxa de variação do volume da placa em relação à temperatura?*
4. *A função  $V(t)$  é crescente ou decrescente? Justifique.*

**Exercício 20.** *Considere a função  $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(x) = \sin(x)$ . Note que, neste intervalo, a função  $f$  é bijetora e, portanto, existe uma função inversa  $f^{-1}$ , bem definida.*

1. *Desenhe o gráfico de  $f$  e, a partir dele, desenhe o gráfico da função  $f^{-1}$ .*
2. *Pela definição de função inversa, temos que  $f(f^{-1}(x)) = x$ . Utilize a regra da cadeia para determinar a derivada de  $f^{-1}$ .*
3. *Utilize a mesma ideia para determinar a derivada da função  $\tan^{-1}(x)$  (não confundir com  $\tan(x)^{-1} = \frac{1}{\tan(x)}$ ).*

**Exercício 21.** Se  $R$  denota a área da pupila de um olho humano, em milímetros quadrados, e  $x$  denota a intensidade da luz que incide sobre a pupila, em candelas (unidade de medida de intensidade luminosa), considere a seguinte equação (obtida experimentalmente) para modelar a relação entre  $R$  e  $I$ :

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}.$$

Observe que a sensibilidade  $S$  do olho humano à luz é dada pela variação de  $R$ . Determine  $S$  em função de  $x$  e, a partir disso, determine a sensibilidade do olho humano à luz quando  $x = 1$ .

**Exercício 22.** Se a frequência de um determinado gene em uma geração é  $p$ , então a frequência do mesmo gene na próxima geração é dada por  $\frac{p(1+s)}{1+sp}$ , onde  $s$  representa a taxa de aptidão do gene. Determine a taxa de variação da frequência do gene em relação à taxa de aptidão.

**Exercício 23.** Em um experimento com o protozoário *Paramecium aurelia*, o biólogo G. F. Gause observou que a população de protozoários podia ser modelada pela função:

$$P(t) = \frac{61}{1 + 31e^{-0.8t}},$$

onde  $t$  é medido em dias. Determine o crescimento da população em função de  $t$ .

**Exercício 24.** Se  $A$  é a área de um círculo de raio  $r$  e o raio cresce com o tempo, determine a taxa de variação de  $A$  em relação a a variação de  $r$ .

**Exercício 25.** Determine os pontos da curva

$$x^3 + 4y^2 = 6xy$$

com coordenada  $x > 0$ , onde a reta tangente é horizontal.

**Exercício 26.** Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Determine:

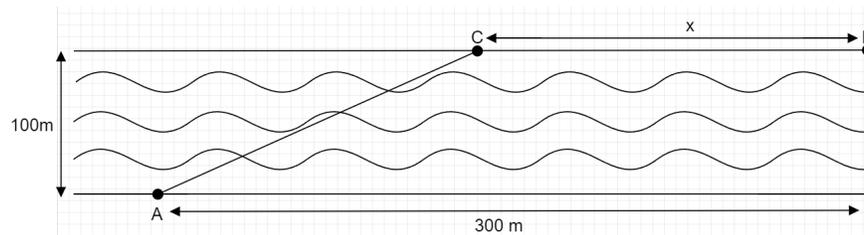
1. O domínio de  $f$ .
2. Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.
3. Os intervalos de concavidade da função (onde ela é concava e onde é convexa).
4. Os pontos de máximo e mínimo (se houver).
5. As assíntotas horizontais e verticais (se houver).

**Exercício 27.** Considere o seguinte modelo para a colheita de uma plantação de trigo em função da concentração de Nitrogênio no solo ( $N$ ) medido na unidade apropriada.

$$P(N) = \frac{kN}{1 + N^2},$$

onde  $k$  é uma constante positiva. Determine o valor de  $N$  que maximiza a colheita.

**Exercício 28.** O diagrama a seguir ilustra o seguinte problema:



Uma pessoa está em um ponto inicial  $A$  na beira de um rio de largura 100 metros e deseja chegar ao ponto  $B$  na outra margem do rio, o mais rápido possível. Considere que a pessoa nada com velocidade constante  $3 \text{ m/s}$  e corre com velocidade constante  $5 \text{ m/s}$ . Note que a pessoa pode escolher o ponto  $C$  que desejar na margem oposta para sair do rio e começar a correr. Seja  $x$  a distância do ponto  $C$  até o ponto  $B$ . Responda as questões abaixo.

- Determine, em função de  $x$ , a distância do ponto  $A$  até o ponto  $B$ .
- Determine, em função de  $x$ , o tempo  $T$  que a pessoa leva para chegar ao ponto  $B$ .
- Determine o valor de  $x$  que minimiza a distância do ponto  $A$  até o ponto  $B$ .
- Determine o valor de  $x$  que minimiza o tempo  $T$  que a pessoa leva para chegar ao ponto  $B$ .