

Métodos Matemáticos em Biologia

Lista 1: Pré-Cálculo

Prof. Bruno Ramos Lima Netto

Entrega: 9 de Setembro de 2024

Exercícios de Álgebra

Exercício 1. *Determine k e m se:*

$$\left(\frac{3}{3^2}\right)^4 \cdot 3^{32} = 3^{-k},$$

e

$$\frac{25 \cdot 5^{2m+1}}{5^{-3}} = 5^{-2}.$$

Exercício 2. *Simplifique e racionalize as expressões:*

1. $\frac{e^{4 \log(81)}}{3^{\log(e^{16})-1}} - \frac{2}{1-\sqrt{3}}.$

2. $\log(e^3)^{-1/2} \cdot \frac{\sqrt{(2+1) \log(x)}}{(\log(x^x))^{1/2}}$

3. $\frac{e^{e \log(7)}}{7^{\log(e^2)-(1/2)}} - \frac{2}{1-3^{(1/3)}}.$

Exercício 3. *Escreva $18\sqrt[4]{4^{13} \cdot 9^{15}}$ na forma $2^x 3^y$.*

Exercício 4. *Determine um par de inteiros p, q tais que: $\frac{81^{1/4}}{9^{-1/2}} \cdot \frac{3^{-3}}{3^0} = \frac{p}{q}$.*

Exercício 5. *Escreva a expressão equivalente a $\frac{3\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x}}$ sem raiz no denominador (racionalize).*

Exercício 6. *Determine o quociente e o resto da divisão de $x^4 - 3x^2 + x + 1$ por $x^2 - 1$.*

Exercício 7. *Verifique que -2 é raiz do polinômio $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$. A seguir, encontre as outras raízes do polinômio, dividindo por $(x + 2)$. (Teorema de D'Alembert)*

Exercício 8. *Determine o valor de $\sum_{i=2}^5 (2i + 1)$ e $\sum_{i=-2}^{10} 1$.*

Exercício 9. *Expand a e simplifique a expressão $(a + b)^2 - (a - b)^2$.*

Exercícios de Funções

Exercício 1. Determine a imagem da função g definida por $g(x) = (3 - x)^2 - 5$.

Exercício 2. Determine o domínio da função $g(x) = \frac{\log(1-x)}{1-\sqrt{x+2}}$.

Exercício 3. Dado $x \in \mathbb{R}$, seja f a função definida de maneira que $f(x)$ é o maior inteiro menor que x . Determine: $f(\pi)$ e $f(-\pi)$. Esta função é injetiva? É sobrejetiva? Qual a sua imagem?

Exercício 4. Esboce o gráfico de:

$$(a) f = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1, \\ 4 - 3x, & \text{se } x \geq 1. \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} -\sqrt{9 - x^2}; & x \leq 3 \\ x - 3; & x > 3. \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 1}; & x \geq 1 \\ \log(x) + 1; & x < 1. \end{cases}$$

Exercício 5. Se $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = 5^x - 4$, determine: $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Exercício 6. Determine o maior intervalo contendo -10 onde $f(x) = (x + 1)^2 + 1$ é injetiva. Esta função é sobrejetiva?

Exercício 7. Determine, caso seja possível, TODOS intervalos onde é crescente:

$$(a) f(x) = 9 - x^2. \quad (b) f(x) = 6 - 2x. \quad (c) f(x) = \log(x) - 4. \\ (d) f(x) = 3x - 7. \quad (e) f(x) = \text{sen}(x) - 4. \quad (f) f(x) = e^{-x}.$$

Exercício 8. Esboce os gráficos de $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Determine se são funções par ou ímpar?

Exercício 9. Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e, fazendo as devidas translações, de $g(x) = 3 + \sqrt{x + 4}$.

Exercício 10. Determine o máximo e o mínimo de $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ nos intervalos:

$$(a) [0, 3]. \quad (b) [2, 3].$$

Exercício 11. Determine $a \in \mathbb{R}$ se $\log_{10}(100^{3a} \cdot 10) = 9$.

Exercício 12. Determine o valor de:

$$(a) e^0. \quad (b) \log(0). \quad (c) \log(1). \quad (d) \log(e). \quad (e) e^{\log(3)}. \quad (f) \log(e^2).$$

Exercício 13. Determine o valor de:

$$(a) \text{sen}(3\pi/2). \quad (b) \cos(3\pi). \quad (c) \tan(3\pi/4). \quad (d) \cos(5\pi/4). \quad (e) \sin(0).$$

Exercício 14. Determine as raízes de $3x^2 - 5x + 2$.

Exercício 15. Por que a igualdade: $\sqrt{x^2} = x$ é falsa para $x \in \mathbb{R}$? Determine uma expressão para $(\sqrt{x})^2$.

Exercício 16. Para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ temos a igualdade: $\sqrt{x^4 + x^2} = x\sqrt{x^2 + 1}$?

Exercício 17. Determine um intervalo para x onde: (a) $\text{sen}(x^2 + x) > 0$ (b) $\log(4 - x^2) < 0$.

Exercício 18. Determine o domínio e a imagem de:

$$(a) \log(x^2 + 3x + 4). \quad (b) \log(x^2 + x - 2). \quad (c) \tan(5x + 2). \\ (d) \text{sen}(3x - x^2 + 4). \quad (e) \log(\tan(5x + 1)).$$

Exercício 19. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x^2 - 2$ e $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função definida por $g(n) = \sum_{k=1}^n k$. Determine:

1. $f(g(3))$.

2. $g(f(3))$.

3. Para quais valores de n , $g(n) > f(n) - 13$?

Exercícios de Geometria

Exercício 1. Determine a equação da reta que passa em $(1, 2)$:

(a) e em $(-2, 3)$. (b) com coeficiente angular 2. (c) perpendicular a reta $3y + 2x = 1$.

Exercício 2. Determine a interseção (todos os pontos) entre o gráfico de $y = x^2 + x - 2$ e o gráfico de:

(a) $2y - x + 1 = 0$. (b) $y + x^2 - x = 0$.

Exercício 3. Determine a distância entre os pontos do plano $(-2, 1)$ e $(4, -1)$.

Exercício 4. Determine todo $a, x \in \mathbb{R}$ tal que: (a) $|a + 2| = 4$. (b) $|x - 2| < |x + 1|$.

Exercício 5. Determine a equação do círculo com centro em $(-3, 5) \in \mathbb{R}^2$ e raio 7.

Exercício 6. Esboce cada uma das regiões do plano xy :

1. Delimitada superiormente por $y = x^2$ e inferiormente por $y = x - x^2$.
2. Delimitada por $y^2 = 2x + 4$ e por $y = x - 2$.
3. Delimitada inferiormente por $y = \sqrt{x}$, superiormente por $y = 1$ e lateralmente por $x = 0$.