Métodos Matemáticos em Biologia
Lista 2: Cálculo Diferencial

Prof. Bruno Ramos Lima Netto

Entrega: 25 de Outubro de 2024?

Exercícios de Limites

Exercício 1. *Seja* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência com* $a_n \in \mathbb{R}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Qual o significado de* $\lim_{n\to\infty} a_n \to L$ *? Dê um exemplo de alguma sequência que satisfaça esse limite.*
2. *Qual o significado de* $\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$ *? Dê um exemplo de alguma sequência que satisfaça esse limite.*

Exercício 2. *Determine os seguintes limites:*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-2}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1000}{5n^3+20n^2}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{10+n}{2+n^2}$.

Exercício 3. *Determine se as sequências abaixo são convergentes ou divergentes. Caso sejam convergentes, determine seus limites.*

1. $a_n = n$
2. $a_n = \frac{1}{n}$
3. $a_n = \frac{1}{n^p}$, *com* $p > 1$
4. $a_n = \frac{1}{n^p}$, *com* $p < 1$
5. $a_n = \log(n)$
6. $a_n = \sin(n)$
7. $a_n = \sin(\pi n)$
8. $a_n = e^n$
9. $a_n = (-2)^n$
10. $a_n = n^n$

Exercício 4. *O que é uma assíntota? Dê exemplo de uma função que:*

1. *possua uma assíntota vertical.*
2. *possua uma assíntota horizontal*
3. *possua infinitas assintotas verticais.*
4. *possua uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.*

Exercício 5. *Determine as assintotas da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = \frac{2x^2+1}{2x^2-3x}$*. Esboce seu gráfico.*

Exercício 6. *Determine o valor de*

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2-1}}{3n}$.
2. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$.
3. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

Exercício 7. *Determine o valor de :*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{a^2x}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n}$.

Exercício 8. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x-5}{|x+2|}, & se\ x \neq -2 \\ 0, & se\ x = -2. \end{cases}$$

Determine:

1. $\lim_{x\to -2^-} f(x)$.
2. $\lim_{x\to -2^+} f(x)$.
3. $\lim_{x\to -2} f(x)$.

Exercício 9. *Considere a função definida por* $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \cdots}}}$*. Determine* $f'(1)$*.*

Exercício 10. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^x$ *e Seja* $g(x) = x^{x^{x+1}} - f(f(x))$*. Determine* $f'(x)$ *e* $g'(x)$*.*

Exercícios de Derivadas

Exercício 11. *Responda as questões abaixo:*

- *Quando que uma função f é derivável em um ponto $x \in \mathbb{R}$?*
- *Explique, detalhadamente, o que você entende por derivada, tanto por seu significado físico quanto geométrico.*

Exercício 12. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \tan(\log(22))$
3. $f(x) = sen(x) + \cos(x)$
4. $f(x) = 3x + \log(x)$

Exercício 13. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Calcule $f'(0)$.*
2. *Calcule $f''(0)$.*
3. *Calcule $f^{(n)}(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 14. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \textit{se } x \neq 0 \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

1. *Calcule $f'(0)$.*
2. *Calcule, se existir, $\lim_{x\to 0} f'(x)$.*
3. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{x}{2} + f(x)$. Mostre que $g'(0) > 0$ mas que g não é crescente em um intervalo contendo 0. Veja o gráfico utilizando algum software de sua preferência. (wolframalpha.com é uma boa opção) e reproduza no papel o que você encontrou.*

Exercício 15. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = sen(x) \log(x)$
2. $f(x) = x^2 \cos(x)$
3. $f(x) = 2sen(x) \cos(x)$
4. $f(x) = x^e e^x$
5. $f(x) = e^{-x} x^{-e}$

Exercício 16. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = sen(\log(x))$
2. $f(x) = \cos(x^2)$
3. $f(x) = sen(2\cos(x))$
4. $f(x) = e^{e^{-x}}$
5. $f(x) = x^{x^x}$

Exercício 17. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = \tan(x)$
2. $f(x) = \tan(x^2)$
3. $f(x) = sen(2\tan(x))$
4. $f(x) = \log(\frac{1}{sen(x)})$

Exercício 18. *Seja $f(x) = \log_{10}(x)$ e $g(x) = f^{-1}(x)$. Determine $f'(x)$ e $g'(x)$.*

Exercícios de Aplicações de Derivadas

Exercício 19. *Considere uma placa de metal cujo volume muda de acordo com a temperatura. Considere que para temperaturas $t > 0$ (em Celsius), seu volume V (em metros cúbicos) é dado pela função:*

$$V(t) = 3 + \log(2t + 1).$$

1. *Qual o valor do volume da placa quando a temperatura é de $0°\,C$?*
2. *Imagine que seja indesejável que o volume do objeto ultrapasse $7m^3$. Qual a temperatura máxima que a placa pode atingir?*
3. *Qual a taxa de variação do volume da placa em relação à temperatura?*
4. *A função $V(t)$ é crescente ou decrescente? Justifique.*

Exercício 20. *Considere a função $f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = \sin(x)$. Note que, neste intervalo, a funçao f é bijetora e, portanto, existe uma função inversa f^{-1}, bem definida.*

1. *Desenhe o gráfico de f e, a partir dele, desenhe o gráfico da função f^{-1}.*
2. *Pela definição de função inversa, temos que $f(f^{-1}(x)) = x$. Utilize a regra da cadeia para determinar a derivada de f^{-1}.*
3. *Utilize a mesma ideia para determinar a derivada da função $tan^{-1}(x)$ (não confundir com $tan(x)^{-1} = \frac{1}{tan(x)}$).*

Exercício 21. *Se R denota a área da pupila de um olho humano, em milímetros quadrados, e x denota a intensidade da luz que incide sobre a pupila, em candelas (unidade de medida de intensidade luminosa), considere a seguinte equação (obtida experimentalmente) para modelar a relação entre R e I:*

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}.$$

Observe que a sensibilidade S do olho humano à luz é dada pela variação de R. Determine S em função de x e, a partir disso, determine a sensibilidade do olho humano à luz quando $x = 1$.

Exercício 22. *Se a frequênica de um determinado gene em uma geração é p, então a frequência do mesmo gene na próxima geração é dada por $\frac{p(1+s)}{1+sp}$, onde s representa a taxa de aptidão do gene. Determine a taxa de variação da frequência do gene em relação à taxa de aptidão.*

Exercício 23. *Em um experimento com o protozoário Paramecium aurelia, o biólogo G. F. Gause observou que a população de protozoários podia ser modelada pela função:*

$$P(t) = \frac{61}{1 + 31e^{-0.8t}},$$

onde t é medido em dias. Determine o crescimento da população em função de t.

Exercício 24. *Se A é a área de um círculo de raio r e o raio cresce com o tempo, determine a taxa de variação de A em relação a a variação de r.*

Exercício 25. *Determine os pontos da curva*

$$x^3 + 4y^2 = 6xy$$

com coordenada $x > 0$, onde a reta tangente é horizontal.

Exercício 26. *Considere a função f definida por $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Determine:*

1. *O domínio de f.*

2. *Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.*

3. *Os intevalos de concavidade da função (onde ela é concava e onde é convexa).*

4. *Os pontos de máximo e mínimo (se houver).*

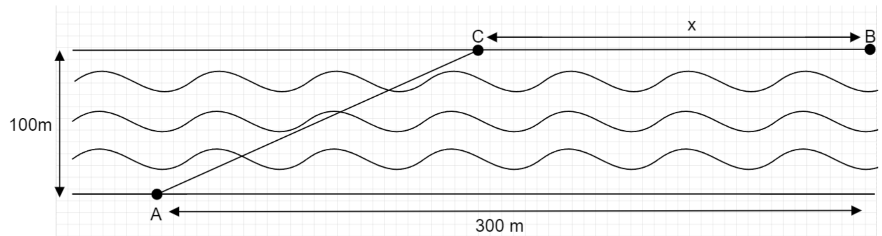
5. *As assíntotas horizontais e verticais (se houver).*

Exercício 27. *Considere o seguinte modelo para a colheita de uma plantação de trigo em função da concentração de Nitrogênio no solo (N) medido na unidade apropriada.*

$$P(N) = \frac{kN}{1 + N^2},$$

onde k é uma constante positiva. Determine o valor de N que maximiza a colheita.

Exercício 28. *O diagrama a seguir ilustra o seguinte problema:*



Uma pessoa está em um ponto inicial A na beira de um rio de largura 100 metros e deseja chegar ao ponto B na outra margem do rio, o mais rápido possível. Considere que a pessoa nada com velocidade constante 3 m/s e corre com velocidade constante 5 m/s. Note que a pessoa pode escolher o ponto C que desejar na margem oposta para sair do rio e começar a correr. Seja x a distância do ponto C até o ponto B. Responda as questões abaixo.

a) *Determine, em função de x, a distância do ponto A até o ponto B.*

b) *Determine, em função de x, o tempo T que a pessoa leva para chegar ao ponto B.*

c) *Determine o valor de x que minimiza a distância do ponto A até o ponto B.*

d) *Determine o valor de x que minimiza o tempo T que a pessoa leva para chegar ao ponto B.*

Exercício 29. *Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. determine o ponto do gráfico de f mais próximo do ponto $(3, 0)$. Justifique sua resposta.*

Exercício 30. *Se a soma de dois números positivos é 12, determine o menor valor possível para a soma dos seus quadrados. Justifique sua resposta.*