

Métodos Matemáticos em Biologia

Segunda Prova

Prof. Bruno Ramos Lima Netto

Data: 6 de Novembro de 2023

Exercício 1. Considere a função definida por $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$. Determine $f'(1)$.
Dica: Note que $f(x) = \sqrt{x + f(x)}$.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^x$ e Seja $g(x) = x^{x^{x+1}} - f(f(x))$. Determine $f'(x)$ e $g'(x)$.

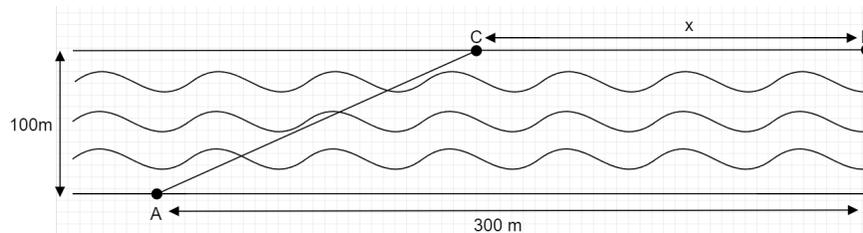
Exercício 3. Determine os pontos da curva

$$x^3 + 4y^2 = 7xy$$

com coordenada $x > 0$, onde a reta tangente é paralela ao eixo x .

Exercício 4. Seja $f : \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(x)$. Considere $g(x) = f^{-1}(x)$ a função inversa de f , de maneira que $g(f(x)) = x$. Seja $h(x) = g(x^2) + f(x^2)$. Determine $h'(x)$.

Exercício 5. O diagrama a seguir ilustra o seguinte problema:



Uma pessoa está em um ponto inicial A na beira de um rio de largura 100 metros e deseja chegar ao ponto B na outra margem do rio, o mais rápido possível. Considere que a pessoa nada com velocidade constante 3 m/s e corre com velocidade constante 5 m/s. Note que a pessoa pode escolher o ponto C que desejar na margem oposta para sair do rio e começar a correr. Seja x a distância do ponto C até o ponto B . Responda as questões abaixo.

- Determine, em função de x , a distância do ponto A até o ponto B .
- Determine, em função de x , o tempo T que a pessoa leva para chegar ao ponto B .
- Determine o valor de x que minimiza a distância do ponto A até o ponto B .
- Determine o valor de x que minimiza o tempo T que a pessoa leva para chegar ao ponto B .

Exercício 6. Considere uma função definida por $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, cujas derivada e segunda derivada são dadas, respectivamente, por:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \text{ e } \frac{d^2}{(dx)^2}f(x) = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}.$$

- a) Calcule o domínio de f .
- b) Determine as assíntotas horizontais e verticais ao gráfico de f caso existam.
- c) Identifique os pontos críticos de f e, determine se são máximos ou mínimos locais, encontrando os intervalos onde a função f é crescente e onde é decrescente.
- d) Identifique os pontos de inflexão de f encontrando os intervalos nos quais a função é convexa ou côncava.
- e) Usando as informações dos itens anteriores, faça um esboço do gráfico de $y = f(x)$.

Exercício 7. Seja $f(x) = \log_{10}(x)$ e $g(x) = f^{-1}(x)$. Determine $f'(x)$ e $g'(x)$.