Métodos Matemáticos em Biologia
Lista 2.2: Derivadas e Aplicações

Prof. Bruno Ramos Lima Netto

Entrega: 13 de Maio de 2023

Exercícios de Derivadas

Exercício 1. *Responda as questões abaixo:*

- *Quando que uma função f é derivável em um ponto $x \in \mathbb{R}$?*
- *Explique, detalhadamente, o que você entende por derivada, tanto por seu significado físico quanto geométrico.*

Exercício 2. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \tan(\log(22))$
3. $f(x) = sen(x) + \cos(x)$
4. $f(x) = 3x + \log(x)$

Exercício 3. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.*

1. *Calcule $f'(0)$.*
2. *Calcule $f''(0)$.*
3. *Calcule $f^{(n)}(0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exercício 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & se\ x \neq 0 \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

1. *Calcule $f'(0)$.*
2. *Calcule, se existir, $\lim_{x\to 0} f'(x)$.*
3. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{x}{2} + f(x)$. Mostre que $g'(0) > 0$ mas que g não é crescente em um intervalo contendo 0. Veja o gráfico utilizando algum software de sua preferência. (wolframalpha.com é uma boa opção) e reproduza no papel o que você encontrou.*

Exercício 5. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = sen(x)\log(x)$
2. $f(x) = x^2\cos(x)$
3. $f(x) = 2sen(x)\cos(x)$
4. $f(x) = x^e e^x$
5. $f(x) = e^{-x}x^{-e}$

Exercício 6. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = sen(\log(x))$
2. $f(x) = \cos(x^2)$
3. $f(x) = sen(2\cos(x))$
4. $f(x) = e^{e^{-x}}$
5. $f(x) = x^{x^x}$

Exercício 7. *Determine as derivadas das funções dadas pelas equações:*

1. $f(x) = \tan(x)$
2. $f(x) = \tan(x^2)$
3. $f(x) = sen(2\tan(x))$
4. $f(x) = \log(\frac{1}{sen(x)})$

Exercícios de Aplicações de Derivadas

Exercício 8. *Considere uma placa de metal cujo volume muda de acordo com a temperatura. Considere que para temperaturas $t > 0$ (em Celsius), seu volume V (em metros cúbicos) é dado pela função:*

$$V(t) = 3 + \log(2t + 1).$$

1. *Qual o valor do volume da placa quando a temperatura é de $0°C$?*
2. *Imagine que seja indesejável que o volume do objeto ultrapasse $7m^3$. Qual a temperatura máxima que a placa pode atingir?*
3. *Qual a taxa de variação do volume da placa em relação à temperatura?*
4. *A função $V(t)$ é crescente ou decrescente? Justifique.*

Exercício 9. *Considere a função $f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ definida por $f(x) = \sin(x)$. Note que, neste intervalo, a funçao f é bijetora e, portanto, existe uma função inversa f^{-1}, bem definida.*

1. *Desenhe o gráfico de f e, a partir dele, desenhe o gráfico da função f^{-1}.*
2. *Pela definição de função inversa, temos que $f(f^{-1}(x)) = x$. Utilize a regra da cadeia para determinar a derivada de f^{-1}.*
3. *Utilize a mesma ideia para determinar a derivada da função $tan^{-1}(x)$ (não confundir com $tan(x)^{-1} = \frac{1}{tan(x)}$).*

Exercício 10. *Se R denota a área da pupila de um olho humano, em milímetros quadrados, e x denota a intensidade da luz que incide sobre a pupila, em candelas (unidade de medida de intensidade luminosa), considere a seguinte equação (obtida experimentalmente) para modelar a relação entre R e I:*

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}.$$

Observe que a sensibilidade S do olho humano à luz é dada pela variação de R. Determine S em função de x e, a partir disso, determine a sensibilidade do olho humano à luz quando $x = 1$.

Exercício 11. *Se a frequênica de um determinado gene é p, então a frequência do mesmo gene na próxima geração é dada por $\frac{p(1+s)}{1+sp}$, onde s representa a taxa de aptidão do gene. Determine a taxa de variação da frequência do gene em relação à taxa de aptidão.*

Exercício 12. *Em um experimento com o protozoário Paramecium aurelia, o biólogo G. F. Gause observou que a população de protozoários podia ser modelada pela função:*

$$P(t) = \frac{61}{1 + 31e^{-0.8t}},$$

onde t é medido em dias. Determine o crescimento da população em função de t.

Exercício 13. *Se A é a área de um círculo de raio r e o raio cresce com o tempo, determine a taxa de variação de A em relação a a variação de r.*

Exercício 14. *Considere a equação dada por:*

$$v(r) = \frac{P}{4\eta\ell}(R^2 - r^2).$$

Esta equação é conhecida como lei de Poiseuille e é utilizada para modelar o a velocidade de um fluido em um tubo cilíndrico a uma distância r do centro do tubo. Nesta equação, v representa a velocidade do fluido, P representa a diferença de pressão entre as extremidades do tubo, η representa a viscosidade do fluido, ℓ representa o comprimento do tubo, R representa o raio do tubo e r representa a distância do centro do tubo.

Suponha que o fluxo sanguíneo em uma artéria seja modelado por esta equação e que: A pressão sanguínea seja $P = 16000Pa$ (1 Pascal $= 1\frac{kg}{ms^2}$), a viscosidade do sangue seja $\eta = 0.04\frac{kg}{m\cdot s}$, o comprimento da artéria seja $\ell = 0.1m$, o raio da artéria seja $R = 0.005m$.

Responda as seguintes perguntas:

1. *Considerando que essas medidas sejam constantes, determine a velocidade do sangue no centro da artéria.*

2. *Em momentos de estresse, a pressão pode aumentar com o tempo, modelada por $P'(t) = e^{5t}$. Determine a variação da velocidade do sangue no centro da árteria em um momento de estresse.*

3. *Em dias frios, a expessura das veias pode diminuir, principalmente nas extremidades do corpo. Modelada por $R'(t) = -0.0005t$, onde t é medido em minutos. Determine a variação da velocidade do sangue no centro da artéria em um dia frio.*

Exercício 15. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2e^{-x}$. Determine:*

1. *Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.*

2. *Encontre os valores de máximo e mínimo locais.*

3. *Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.*

4. *Esboce o gráfico da função.*

Exercício 16. *Determine os pontos da curva*

$$x^3 + 4y^2 = 6xy$$

com coordenada $x > 0$, onde a reta tangente é horizontal.

Exercício 17. *Considere a função f definida por $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Determine:*

1. *O domínio de f.*

2. *Os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente.*

3. *Os intevalos de concavidade da função (onde ela é concava e onde é convexa).*

4. *Os pontos de máximo e mínimo (se houver).*

5. *As assíntotas horizontais e verticais (se houver).*